COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES — Durée : 3 heures

Le problème comporte deux parties indépendantes notées I et II qui seront traitées sur des feuilles séparées.

PARTIE I

Dans tout le problème, n est un nombre entier positif ou nul. On définit la suite I_n de fonctions réelles de la variable réelle x par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1 - t^2)^n \cos(tx)\, dt.$$

1° Montrer que $|I_n(x)| \leqslant 1$.

2° Calculer, pour tout x, $I_0(x)$ et $I_1(x)$ et montrer que les fonctions I_0 et I_1 sont continues sur $\mathbf{R}$.

3° Plus généralement, en utilisant la définition de la continuité d'une fonction, montrer que, pour tout n, I_n est une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

4° *a.* Si x, t et h sont trois nombres réels quelconques, démontrer l'inégalité :

$$|\cos t(x + h) - \cos tx + t\,h \sin tx| \leqslant \frac{1}{2} t^2 h^2.$$

b. En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction, montrer que I_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ et exprimer la dérivée $I'_n(x)$ sous forme d'une intégrale.

5° Établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(x)$ et $I'_n(x)$. En déduire $I_2(x)$ pour tout x réel.

6° *a.* Sans utiliser les résultats des questions précédentes, établir, pour x non nul, une relation de récurrence entre $I_n(x)$, $I_{n+1}(x)$ et $I_{n+2}(x)$.

b. En déduire une relation de récurrence entre $I_{n+1}(0)$ et $I_n(0)$ et calculer, pour tout n, l'intégrale :

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n\, dt.$$

c. Vérifier les résultats obtenus dans la cinquième question pour $I_2(x)$.

PARTIE II

1° Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3), est :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

b. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ par rapport à laquelle u admet pour matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On choisira les coordonnées des vecteurs v_1, v_2 et v_3, relativement à la base canonique, parmi les nombres $+1$, 0, -1.

2° Étant données trois fonctions réelles f_1, f_2 et f_3 de la variable réelle x, dérivables sur $\mathbf{R}$ et de dérivées f'_1, f'_2, f'_3, on pose :

$$V(x) = f_1(x)\, e_1 + f_2(x)\, e_2 + f_3(x)\, e_3,$$
$$V'(x) = f'_1(x)\, e_1 + f'_2(x)\, e_2 + f'_3(x)\, e_3.$$

a. Déterminer les coordonnées $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ de $V(x)$ dans la base (v_1, v_2, v_3). Démontrer que l'on a :

$$V'(x) = g'_1(x)\, v_1 + g'_2(x)\, v_2 + g'_3(x)\, v_3.$$

b. Utiliser les résultats des questions précédentes pour déterminer l'ensemble des solutions du système d'équations différentielles :

$$f'_1(x) = 8 f_1(x) - f_2(x) - 5 f_3(x),$$
$$f'_2(x) = -2 f_1(x) + 3 f_2(x) + f_3(x),$$
$$f'_3(x) = 4 f_1(x) - f_2(x) - f_3(x).$$

c. Déterminer les fonctions f_1, f_2 et f_3 pour lesquelles on a : $V(0) = -e_1 + e_2$.

3° On pose :

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. En utilisant D et E, calculer B^n, pour $n \geqslant 1$.

b. Calculer A^n, pour $n \geqslant 1$.

Page 98 E.N.S. de LYON Opt. Sc. Nat. - 1988

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail